

تاریخ: ۱۴۰۰/۱۰/۱

بسمه تعالی

تعداد صفحات: ۱ صفحه

آموزش و پرورش شهرستان مشهد ناحیه ۴

نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۱۴ سوال

موسسه فرهنگی آموزشی امام حسین علیه السلام

نام دبیر: سلیمان نوری

نمره به عدد:

دبیرستان دخترانه دوره دوم امام حسین (ع) - واحد ۲

ساعت شروع: صبح

نمره به حروف:

آزمون نوبت اول پایه دوازدهم رشته ریاضی

نام درس: هندسه ۳

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

بارم	سئالات	ردیف
۱/۵	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار $x$ را بیابید	۱
۱	اگر $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $ A   A^2 $ را بدست آورید	۲
۱/۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون حل کنید $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$	۳
۱	ثابت کنید وارون هر ماتریس یکتاست	۴
۱/۵	اگر $2A = \begin{bmatrix}  A  & 4 \\ 1 &  A  \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $ A^{-1} $ را بیابید	۵
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقادیر $m$ و $n$ طوری بیابید که رابطه $A^2 = mA + nI$ برقرار باشد.	۶
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس $A^4$ را بدست آورید	۷
۱/۵	دو نقطه $A$ و $B$ و خط $d$ که شامل هیچ یک نیست نقطه ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از $d$ به فاصله ۴ سانتی متر باشد (بحث کنید)	۸
۱/۵	وضعیت خط $x + y = 1$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - 2x = 2$ را تعیین کنید.	۹
۱/۵	معادله دایره ای بنویسید که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد و $0 = 1 - y - 2x$ شامل قطری از آن باشد	۱۰
۱/۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و با دایره $0 = 3 - 4x - 6y + x^2 + y^2$ مماس داخل باشد.	۱۱
۱	آیا رابطه $0 = 4 + 3y + 2x + x^2 + y^2$ می تواند معادله یک دایره باشد؟ چرا؟ (با راه حل)	۱۲
۱	وضعیت جفت دایره $1 = (x-1)^2 + y^2$ و $0 = 1 - (y-1)^2 + x^2$ را نسبت به هم مشخص کنید	۱۳
۳/۵	جاهای خالی را با علامت مناسب پر کنید الف) اگر صفحه $P$ با مولد $d$ موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند در آن صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی _____ است. ب) صفحه ای سطح مخروطی را برش می دهد و شامل محور آن است در آن صورت سطح مقطع _____ است. پ) صفحه ای با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن عبور نمی کند فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی _____ است. ت) مکان هندسی مرکز همه دایره هایی در صفحه که بر خط $d$ در نقطه $A$ مماسند _____ است. ث) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی $A$ وارون پذیر باشد آن است که _____. ج) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس _____ می نامیم. م) $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد درایه واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A$ برابر با _____ است.	۱۴

جمع نمره: ۲۰

« موفق باشید »



سوال اول

$$\begin{bmatrix} 3x & y \\ 1xy & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3x-6 & -2x+12 \\ 1xy & 4xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -3x+6 & -2x+12 \\ 1xy & 4xy \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9x+18 \\ 1xy \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -9x+18=0 \rightarrow x=2$$

سوال دوم

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 2(4-3) = 2$$

$$|A|A^2 = |2A^2| = 2^3 |A|^2 = 8(2)^2 = 32$$

سوال سوم

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$AB=C \rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}C$

$$B = \frac{1}{3+1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 11 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow x=1 \text{ و } y=-1$$

سوال چهارم

فرضی کنیم ماتریسهای B و C هر دو وارون باشند نسبت به یکدیگر

$$B=C$$

فرض  $AB=BA=I$

فرض  $AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

سوال پنجم

$$|2A| = \begin{vmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{vmatrix} \rightarrow 4|A| = |A|^2 + 4$$

$$\rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \rightarrow (|A|-2)^2 = 0 \rightarrow |A|=2$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

سوال ششم

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

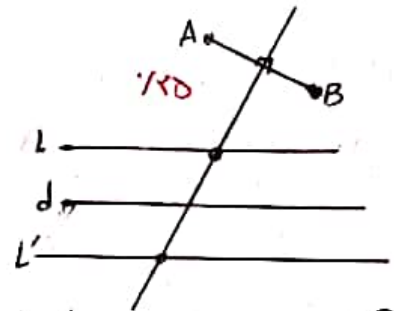
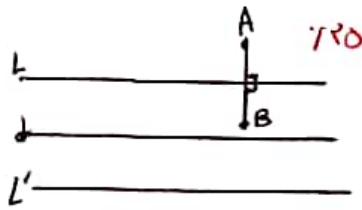
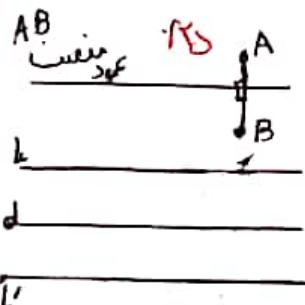
$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \rightarrow n=8 \text{ و } m=1$$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$  ۱۲۵

سوال ۷

$A^3 = (A^2)^3 \cdot A = (-2I)^3 \cdot A = -8A = -8 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$  ۱۲۵

سوال ۸ مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد عمود منصف پاره خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از خط l به فاصله مساوی متر باشد دو خط موازی خط l در طرفین آن و به فاصله مساوی متر از آن. حال جواب مسئله استرک است این دو مکان هندسی است که به حالت زیر می آید.



① عمود منصف AB خطوط l و l' را قطع کند مسئله جواب ندارد (عمود منصف با l موازی است) ۱۲۵

② عمود منصف AB بر l از خط l و l' منطبق است مسئله بی جواب دارد ۱۲۵

③ عمود منصف AB دو خط l و l' را قطع کند مسئله دو جواب دارد ۱۲۵

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$   $\begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = 1 \end{cases}$  ۱۲۵

سوال ۹

$R = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{r} \sqrt{4 + 4 - 8} = \frac{1}{r} \sqrt{0} = 0$  ۱۲۵

$OH = \frac{|1x + 1y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ۱۲۵ چون  $R > OH$  خط دایره متقاطع ۱۵

$y = 2x - 1$   $\begin{cases} \alpha \\ 2\alpha - 1 \end{cases}$  ۱۲۵  $OA = OB = R$  ۱۲۵

سوال ۱۰

$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1-2)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha-1-0)^2} \rightarrow (\alpha-1)^2 + (2\alpha-3)^2 = (\alpha-3)^2 + (2\alpha-1)^2$   
 $\rightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 4\alpha^2 + 9 - 12\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \rightarrow \alpha = 0$  ۱۲۵

$OB = \sqrt{(3-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{10} = R$  ۱۲۵

$(x-0)^2 + (y+1)^2 = 10$  ۱۲۵

صغیر سو

سوال ۱۱

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$o' \begin{cases} -\frac{a}{p} = 2 \\ -\frac{b}{q} = 3 \end{cases} \quad 1/20$$

$$R' = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{1} \sqrt{16 + 36 + 12} = \frac{1}{1} \sqrt{64} = 8 \quad 1/20$$

$$oo' = \sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2} = 2\sqrt{2} \quad 1/20 \quad d = oo' = |R - R'| \quad 1/20$$

$$2\sqrt{2} = |R - 8| \rightarrow R - 8 = \pm 2\sqrt{2} \rightarrow R = \pm 2\sqrt{2} + 8 \quad 1/20$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (\pm 2\sqrt{2} + 8)^2 \quad 1/20$$

سوال ۱۲

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 9 - 16 = -3 < 0 \quad 1/20$$

معنی آنرا نه معادله یک دایره است  $\alpha^2 + b^2 < +4c$  چون  $1/20$

سوال ۱۳

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad o' \quad R=1 \quad 1/20$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad o' \quad R'=1 \quad 1/20$$

$$oo' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$R + R' = 2 \quad |R - R'| = 0$$

$$\text{چون } |R - R'| < oo' < |R + R'| \rightarrow$$

دو دایره متقاطعند  $1/20$

ج ۳/۵

پاسخ هر قسمت ۵/۵

سوال ۱۴

الف) یک خط

ب) دو خط متقاطع

پ) سه خط

ت) خطی است عمود بر خط d در نقطه A

ث)  $|A| \neq 0$

ج) اقلار

$$\alpha_{1/2} = \frac{2 \times 2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 \quad 1/20$$