

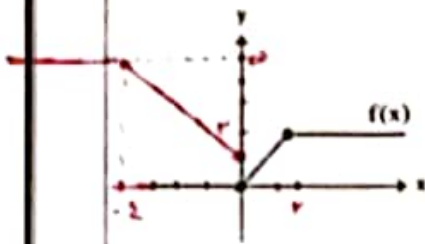


«در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن است! ریاضیات الهی است که خداوند جهان را بر مبنای آن خلق کرد.» (گالیله)

ردیف	سوالان	نمره
۱	<p>درستی و نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. <i>درست</i></p> <p>ب) اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد، آنگاه $\tan \alpha < \sin \alpha$ <i>درست</i></p> <p>ج) تابع $f(x) = x-1$ در بازه $[-2, 3]$ وارون پذیر است. <i>نادرست</i></p> <p>د) اگر $f(x) = \sqrt{x}$، $g(x) = 2x-1$، آنگاه $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ <i>درست</i></p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) دوره تناوب تابع $y = -1 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ برابر با $\frac{2\pi}{3}$ است.</p> <p>ب) در تابع $y = \tan x$ برد برابر \mathbb{R} می باشد و این تابع از لحاظ یکنوایی در هر بازه تعریف شده <i>یکنواخت</i> می باشد و دوره تناوب آن π است.</p> <p>ج) اگر $A(2, -1)$ یک نقطه روی نمودار تابع f باشد، منظر این نقطه $g(x) = -2f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ نقطه $(2, 2)$ می باشد.</p> <p>د) با توجه به نمودار زیر داریم:</p>	۰/۲۵
۰/۷۵		۰/۷۵
۰/۷۵	<p>$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$</p>	۰/۷۵
۳	<p>نمودار توابع زیر را رسم کرده و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟</p> <p>الف) $y = x^2 - 1$</p> <p>ب) $y = -(x-1)^2 + 1$</p>	۲
	<p><i>اگرچه نزولی</i> $(-\infty, +\infty)$</p> <p>$[1, +\infty)$ و $(-\infty, -1]$ صعودی $[0, 1]$ و $(-1, 0)$ نزولی</p>	

۱/۵

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $g(x) = 2f\left(\frac{-x}{2}\right) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.



$$D_g = (-\infty, 0]$$

$$R_g = [2, 0]$$

۱/۵

اگر $g(x) = \frac{-2}{x-2}$ ، $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد.

الف) دامنه تابع $g \circ f(x)$ را به کمک تعریف بدست آورید؟

$$D_f = (-\infty, 2] \quad D_g = (2, \infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\rightarrow \sqrt{2-x} \neq 2 \rightarrow 2-x \neq 4 \rightarrow x \neq -2$$

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 2]$$

ب) حاصل $g^{-1} \circ f(2)$ را بیابید؟

$$f(2) = 0 \quad g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(0) =$$

$$\frac{-2}{x-2} = 0 \rightarrow 2x - 2 = -2 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

۱

ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را بدست آورید؟

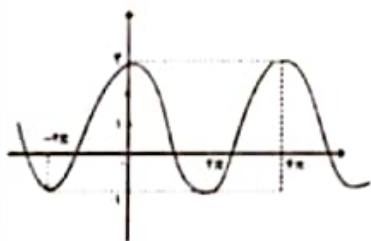
$$y = -5 - \sqrt{3x+1}$$

$$\sqrt{3x+1} = -5 - y \rightarrow 3x+1 = (-5-y)^2 \rightarrow 3x = (-5-y)^2 - 1$$

$$x = \frac{(-5-y)^2 - 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 10y + 24}{3}$$

۱/۵

با توجه به نمودار تابع، ضابطه تابع را به صورت $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ بنویسید؟ (max و min و دوره تناوب را نیز مشخص کنید).



$$\max = 2 \rightarrow c = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\min = 0$$

$$|a| = 2 \rightarrow a = 2 \quad |b| = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$y = 2 \cos 2x + \frac{1}{2}$$

۱

مقدار عددی $\cos 15^\circ$ را بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

$$2\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$$

۲

جواب کلی معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \quad \cos x (2\cos x - 1) = 0 \quad \begin{matrix} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{matrix}$$

حد توابع زیر را بدست آورید؟

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+2}} \times \frac{x - \sqrt{2x+2}}{x - \sqrt{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x - \sqrt{2x+2})}{x^2 - 2x - 2} = \frac{-2 \cdot 2}{-2} = 2$$

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x^2 - 2x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-0)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{1}$$

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - 2}{2 - x} = \frac{+1 - 2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x} - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x}{2 - x} = \frac{2x}{-1} = +\infty$$

مقدار m, a را طوری بدست آورید که داشته باشیم:

$$0/0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+1)x^{m-1} + x^2 - 5}{2x^2 - x^2 + 2x} = 2$$

$$m-1=2 \rightarrow m=3$$

$$\frac{a+1}{2} = 2 \rightarrow a+1=4 \quad \boxed{a=3}$$

با توجه به نمودار تابع زیر به سوالات پاسخ دهید

الف) مشتق تابع f را در نقاط داده شده از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
 $f'(F) < f'(A) < f'(B) < f'(D) < f'(C)$

ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مشتق تابع هر دو منفی هستند **A**

ب) در کدام نقطه مقدار تابع مثبت و مشتق تابع منفی است. **F**

